

〔 1 〕 (配点 50 点)

原点を O とする座標空間に, 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 2)$, $C(-2, 1, 3)$ がある。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ において, $\angle B$ は $\frac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ。
- (2) 点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC との交点を H とする。
点 H の座標を求めよ。
- (3) $\triangle OAH$ の面積を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $t \geq 0$ のとき、曲線 C は傾きが t である接線を 2 本持つことを示せ。
- (2) (1) において、傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を、それぞれ $P(p, f(p)), Q(q, f(q))$ とする (ただし $p < q$)。このとき、点 P と点 Q は点 $A(-1, 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。
- (3) $t \geq 0$ のとき、2 点 P, Q の間の距離の最小値を求めよ。また、最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

100 人の団体がある区間を列車で移動する。このとき、乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と、乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を購入して、利用することにした。以下の問いに答えよ。

- (1) x が 0 以上の整数であるとき、次のことを示せ。

$$\frac{1}{3}(100 - 7x)$$

は、 x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に整数であり、それ以外の場合は整数ではない。

- (2) 購入した乗車券は、余らせずすべて利用するものとする。このとき、セット A とセット B の購入の仕方をすべて挙げよ。
- (3) 購入した乗車券は余ってもよいものとする。このとき、A のみ、あるいは B のみを購入する場合も含めて、購入金額が最も低くなるのは、A, B をそれぞれ何セットずつ購入するときか。またそのときの購入金額はいくらか。

〔 4 〕 (配点 50 点)

いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ。

- (1) 試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。
- (2) 試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。
- (3) 試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。