〔 **1** 〕 (配点 50 点)

放物線 $y=x^2$ 上の点 $P(t,t^2)$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t>1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点を R とするとき，三角形 PRH の面積を t を用いて表せ。

(3) $x \geqq 1$ の範囲において，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(4) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1-a_n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

をみたしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，a_{10} および a_{11} を求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1 = \tan\dfrac{\pi}{7}$ とする。$a_k = a_1$ をみたす 2 以上の自然数 k で最小のものを求めよ。

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

平面上に直角三角形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする。また，点 O は

$$4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = 0$$

をみたしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 辺 BC の中点を M とするとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ。

(2) $\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OC}\right|^2 = 10$ となることを示せ。

(3) $4\left|\overrightarrow{PA}\right|^2 - \left|\overrightarrow{PB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{PC}\right|^2 = -4$ をみたす点を P とするとき，$\left|\overrightarrow{OP}\right|$ の値を求めよ。

〔 **4** 〕(配点 50 点)

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ、以下の操作を考える。

操作：

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば、i のカードと j のカードを入れかえる。その後、2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ、上の操作を 2 回繰り返した後のカードについて、以下の問いに答えよ。

(1) カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。

(2) カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。

(3) 左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

(4) 左端のカードの数字の期待値を求めよ。