

〔 1 〕 (配点 50 点)

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ とする。実数 t を与えたとき, A を始点とし B を通る半直線上に $AP = tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

- (1) CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。
- (2) 点 P が $CP = a$ を満たすとき, t を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき, $\angle A$ と $\angle B$ に関する条件を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

次のような競技を考える．競技者がサイコロを振る．もし，出た目が気に入ればその目を得点とする．そうでなければ，もう 1 回サイコロを振って，2 つの目の合計を得点とすることができる．ただし，合計が 7 以上になった場合は得点は 0 点とする．この取り決めによって，2 回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう．次の問いに答えよ．

- (1) 競技者が常にサイコロを 2 回振るとすると，得点の期待値はいくらか．
- (2) 競技者が最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか．
- (3) 得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに 2 回目を振るとよいか．

〔 3 〕 (配点 50 点)

xy 平面上に曲線 $y = \frac{1}{x^2}$ を描き、この曲線の第 1 象限内の部分を C_1 、第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。 C_1 上の点 $P_1 \left(a, \frac{1}{a^2} \right)$ から C_2 に向けて接線を引き、 C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き、 C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き、接点を Q_2 とする。以下同様に続けて、 C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 Q_1 の座標を求めよ。
- (2) 三角形 $P_1Q_1P_2$ の面積 S_1 を求めよ。
- (3) 三角形 $P_nQ_nP_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の面積 S_n を求めよ。
- (4) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

中心 $(0, a)$, 半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0, 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

- (1) 円が角 t だけ回転したとき, 点 P の座標を求めよ。
- (2) t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) (2) の曲線 C の長さを求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

実数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。平面上の点 $P(x, y)$ に対し, 点 $Q(X, Y)$ を $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により定める。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき, Q が放物線 $9X = 2Y^2$ 全体の上を動くという。このとき, 行列 A を求めよ。
- (2) P が放物線 $y = x^2$ の全体の上を動くとき, Q は常に円 $X^2 + (Y - 1)^2 = 1$ の上にあるという。このとき, 行列 A を求めよ。
- (3) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき, Q がある直線 L 全体の上を動くための a, b, c, d についての条件を求めよ。また, その条件が成り立っているとき, 直線 L の方程式を求めよ。