〔 **1** 〕 (配点 50 点)

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ とする。実数 t を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に $AP = tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1) CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2) 点 P が $CP = a$ を満たすとき，t を求めよ。

(3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle A$ と $\angle B$ に関する条件を求めよ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

次のような競技を考える．競技者がサイコロを振る．もし，出た目が気に入ればその目を得点とする．そうでなければ，もう１回サイコロを振って，２つの目の合計を得点とすることができる．ただし，合計が７以上になった場合は得点は０点とする．この取り決めによって，２回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう．次の問いに答えよ．

(1) 競技者が常にサイコロを２回振るとすると，得点の期待値はいくらか.

(2) 競技者が最初の目が６のときだけ２回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか.

(3) 得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに２回目を振るとよいか.

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円を描き，その上半分を C とし, その両端を $A(-1,0), B(1,0)$ とする．C 上の 2 点 M, N を $NM = MB$ となるようにとる．ただし，$N \neq B$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\angle MAB = \theta$ とおくとき，弦の長さ MB および点 M の座標を θ を用いて表せ.

(2) 点 N から x 軸におろした垂線を NP としたとき，PB を θ を用いて表せ.

(3) $t = \sin\theta$ とおく．条件 $MB = PB$ を t を用いて表せ.

(4) $MB = PB$ となるような点 M がただ一つあることを示せ.

〔 **4** 〕 (配点 50 点)

以下の問いに答えよ。答えだけでなく，必ず証明も記せ。

(1) 和 $1+2+\cdots+n$ を n の多項式で表せ。

(2) 和 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ を n の多項式で表せ。

(3) 和 $1^3+2^3+\cdots+n^3$ を n の多項式で表せ。