

〔 1 〕 (配点 50 点)

座標平面に 3 点 $O(0, 0)$ 、 $A(2, 6)$ 、 $B(3, 4)$ をとり、点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす. また、実数 s と t に対し、点 P を $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で定める. このとき、次の問いに答えよ.

- (1) 点 C の座標を求め、 $\left|\overrightarrow{CP}\right|^2$ を s と t を用いて表せ.
- (2) s を定数として、 t を $t \geq 0$ の範囲で動かすとき、 $\left|\overrightarrow{CP}\right|^2$ の最小値を求めよ.

〔 2 〕 (配点 50 点)

k は 2 以上の自然数とする. 「1」と書かれたカードが 1 枚, 「2」と書かれたカードが 2 枚, $\dots$, 「 k 」と書かれたカードが k 枚ある. そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M , 奇数が書かれたカードの枚数を N で表す. この $(M + N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し, そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す. 記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする. 次の問いに答えよ.

- (1) p_1 と p_2 を M , N で表せ.
- (2) p_{n+1} を p_n , M , N で表せ.
- (3) $\frac{M - N}{M + N}$ の値を求めよ.
- (4) p_n を n と k で表せ.

〔 3 〕 (配点 50 点)

曲線 $C_1 : y = \frac{x^2}{2}$ の点 $P\left(a, \frac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $Q\left(b, \frac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする。ただし, $b \neq a$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) b が a に限りなく近づくとき, R はある点 A に限りなく近づく。 A の座標を a で表せ。
- (2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき, (1) で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き, C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。
- (3) 曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

2 次の列ベクトル X, Y, Z は大きさが 1 であり, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ かつ $Y \neq X$ とする. ただし, 一般に 2 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{x^2 + y^2}$ で定義される. また, 2 次の正方行列 A が $AX = Y, AY = Z, AZ = X$ をみたすとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $Y \neq -X$ を示せ.

(2) Z は $Z = sX + tY$ (s, t は実数) の形にただ一通りに表せることを示せ.

(3) $X + Y + Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を示せ.

(4) 行列 A を求めよ.

〔 5 〕 (配点 50 点)

曲線 $y = e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t), y(t))$ と表し, P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ と $\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$ とする. すべての時刻 t で $|\vec{v}| = 1$ かつ $\frac{dx}{dt} > 0$ であるとして, 次の問いに答えよ.

- (1) P が点 (s, e^s) を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ.
- (2) P が点 (s, e^s) を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ.
- (3) P が曲線全体を動くとき, $|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ.