〔 **1** 〕 (配点 50 点)

自然数 n に対して，$a_n = (\cos 2^n)(\cos 2^{n-1})\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく。ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \dfrac{\sin 4}{\sin 1}$ を示せ。

(2) $a_n = \dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ。

(3) $a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

放物線 $C : y = x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 (p, p^2) における C の法線の方程式を求めよ．

(2) y 軸上の点 $(0, a)$ を通る C の法線の本数を求めよ．

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

図のような五角形 $ABCDE$（角 A が直角である二等辺三角形 ABE と長方形 $BCDE$ をあわせた図形）において，辺 BC と辺 DE の長さは 1，辺 CD と線分 BE の長さは 2 とする。線分 BE の中点を O とする。また，5 枚のカードがあり，それぞれに A, B, C, D, E と書いてある。カードをよくきって 1 枚引き，もとに戻す。この操作を n 回繰り返し，i 回目に引いたカードの文字を P_i とする。たとえば，i 回目に B を引いたとすると，$P_i = B$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ の内積が 1 である確率を求めよ。

(3) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OP_i}$ の内積を q_i とする。このとき，$q_1 q_2 \cdots q_n = 0$ となる確率を求めよ。

〔 **4** 〕 (配点 50 点)

放物線 $C : y = x^2 - 1$ と $a_1 > 1$ を満たす実数 a_1 を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $(a_1, a_1^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_2 とするとき，a_2 を a_1 を用いて表せ。

(2) (1) で求めた a_2 に対して，C 上の点 $(a_2, a_2^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_3 とする。この操作を繰り返してできる数列を $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ とする。このとき，すべての n に対して，$a_n > 1$ を示せ。

(3) $b_n = \dfrac{1}{2}(a_n - 1)$ とおくとき，すべての n に対して，$b_{n+1} < b_n^2$ を示せ。

(4) $a_1 = 2$ のとき，$b_n < 10^{-12}$ となる n の値を 1 つ求めよ。ただし，必要があれば，$\log_{10} 2$ を 0.301 として計算してよい。