

〔 1 〕 (配点 50 点)

曲線 $C : y = x^2$ 上に点 $P(t, t^2)$ をとり, 点 P における曲線 C の接線を l , 点 P を通り l に垂直な直線を m とする. ただし, $t > 0$ とする. 接線 l と x 軸との交点を Q とし, 直線 m と x 軸, y 軸との交点をそれぞれ R_1, R_2 とする. また, $\triangle PQR_1$ の面積を S_1 とし, 曲線 C と y 軸および線分 PR_2 で囲まれる図形の面積を S_2 とする. このとき次の問いに答えよ.

- (1) 点 Q と点 R_1 の x 座標を t を用いて表せ.
- (2) 面積 S_2 を t を用いて表せ.
- (3) $S_1 > S_2$ が成り立つ t の範囲を求めよ.

〔 2 〕 (配点 50 点)

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, $a_1 = b_1 = 1$ および, 関係式

$$a_{n+1} = 2a_nb_n$$

$$b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$$

をみたすものとする.

- (1) $n \geq 3$ のとき, a_n は 3 で割り切れるが, b_n は 3 で割り切れないことを示せ.
- (2) $n \geq 2$ のとき, a_n と b_n は互いに素であることを示せ.

〔 3 〕 (配点 50 点)

空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ について次の問いに答えよ。ただし, h と k は実数とする。

- (1) $h\vec{a} + \vec{b}$ が $\vec{a}$ と垂直であるとき, すべての実数 x に対して,

$$|x\vec{a} + \vec{b}| \geq |h\vec{a} + \vec{b}|$$

が成り立つことを示せ。ただし, $\vec{0}$ はすべてのベクトルと垂直であるとする。

- (2) $h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$ が $\vec{a}$, $\vec{b}$ のいずれとも垂直であるとき, すべての実数 x, y に対して,

$$|x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}| \geq |h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}|$$

が成り立つことを示せ。

- (3) $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 4, -2)$, $\vec{c} = (-3, -6, 6)$ とするとき, $|x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}|$ の最小値を与える実数 x, y と, そのときの最小値を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

関数 $f(x) = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 $-\pi \leq x \leq \pi$ とする。

- (1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (3) 実数 k に対し、 $f(x) = k$ を満たす x の個数を求めよ。