

〔 1 〕 (配点 50 点)

a を正の実数とし、点 $A(0, a + \frac{1}{2a})$ と曲線 $C: y = ax^2 (x \geq 0)$ を考える．曲線 C 上の点で、点 A との距離が最小となるものを P とする．このとき、次の問いに答えよ．

- (1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ．
- (2) 曲線 C と y 軸、および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．
- (3) $a > 0$ のとき、面積 $S(a)$ の最小値を求めよ．また、そのときの a の値を求めよ．

〔 2 〕 (配点 50 点)

t を実数とするととき, 2 次方程式 $z^2 + tz + t = 0$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と, そのときの虚数解をすべて求めよ.
- (2) (1) の虚数解のうち, その虚部が正のものを $z(t)$ で表す. t が (1) で求めた範囲を動くとき, 複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め, 図示せよ.
- (3) 複素数平面上で, 点 z が (2) の図形 C 上を動くとき, $w = \frac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め, 図示せよ.

〔 3 〕 (配点 50 点)

実数 x に対して, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す. 例えば,

$$\left[\frac{3}{2} \right] = 1, [2] = 2$$

である. このとき, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ として次の問いに答えよ. ただし, 必要なら

$\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 $\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ を用いてよい.

(1) 不等式 $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ.

(2) 不等式

$$\left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right] \geq 1 \text{ を満たす } \theta \text{ の範囲を求めよ.}$$

(3) 不等式

$$\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq 0 \leq \left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right] \text{ を満たす } \theta \text{ の範囲を求めよ.}$$

〔 4 〕 (配点 50 点)

1つのさいころを4回投げて, 出た目の数を順に x_1, x_2, x_3, x_4 とする. このとき次の問いに答えよ.

- (1) $x_1 < x_2$ となる確率を求めよ.
- (2) $x_1 < x_2 < x_3$ となる確率を求めよ.
- (3) $x_1 < x_2$ かつ $x_2 \geq x_3$ となる確率を求めよ.
- (4) $x_k \geq x_{k+1}$ となる最小の自然数 k の期待値を求めよ. ただし, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ のときは $k = 4$ と定める.