

〔 1 〕 (配点 50 点)

$n = 0, 1, 2, \dots$  に対して  $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx$  とおく。ただし、 $0! = 1$  とする。

(1)  $I_0$  の値を求め、 $n = 1, 2, \dots$  のとき  $I_n$  と  $I_{n-1}$  の関係式を求めよ。また、これらを用いて  $I_3$  の値を求めよ。

(2)  $0 \leq x \leq 2$  に対して  $e^x \leq e^2$  であることを利用して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq 2e^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(3) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!}$$

を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  に対して、次の問いに答えよ。ただし、 $a, b$  は定数とする。

- (1)  $(a + b)^4, (a - b)^4$  を展開せよ。
- (2)  $A^4$  を  $(a + b)^4, (a - b)^4$  を用いて表せ。
- (3) 自然数  $n$  に対して、 $A^n$  を求めよ。
- (4)  $0 < a < 1$  と  $b = 1 - a$  としたときの  $A^n$  の  $(1, 1)$  成分を  $x_n$  とする。  
極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

座標平面上を動く点  $P(x(t), y(t))$  の時刻  $t$  における座標が

$$\begin{cases} x(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$$

$(0 \leq t < 2\pi)$  で与えられているとし、この点の軌跡を  $C$  とする。

- (1)  $P$  が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ。
- (2)  $C$  が  $x$  軸,  $y$  軸に関して対称であることを示せ。
- (3)  $C$  の概形を描け。
- (4)  $C$  が囲む図形の面積を求めよ。

[ 4 ] (配点 50 点)

座標空間内の三角柱  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \geq y, 0 \leq z \leq 1$  を考え, その  $xy$  平面内の面を  $S$ ,  $xz$  平面内の面を  $T$  とする. 点  $A(a, b, 0)$  を  $S$  内に, 点  $B(c, 0, d)$  を  $T$  内にとり, また  $C(1, 1, 1)$  とする. ただし, 点  $A, B$  は原点  $O$  とは異なるとする.

- (1) ベクトル  $\overrightarrow{OA}$  および  $\overrightarrow{OC}$  に直交する単位ベクトルを求め, その単位ベクトルとベクトル  $\overrightarrow{OB}$  の内積の絶対値を求めよ.
- (2) 四面体  $OABC$  の体積を求めよ. ただし, 点  $O, A, B, C$  は同一平面上にないとする.
- (3) 点  $A$  が  $S$  内を, 点  $B$  が  $T$  内を動くとする. このときの, 四面体  $OABC$  の体積の最大値, および最大値を与える点  $A, B$  の位置をすべて求めよ.

〔 5 〕 (配点 50 点)

$n$  を 3 以上の自然数とする. スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に  $n$  個並んでいる. これらの  $n$  個の電球のスイッチを同時に入れたあと, 左から電球の色を見ていき, 色の変化の回数を調べる.

- (1) 赤青…青, 赤赤青…青, ……のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ.
- (2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ.
- (3) 色の変化がちょうど  $m$  回 ( $0 \leq m \leq n - 1$ ) 起きる確率を求めよ.
- (4) 色の変化の回数の期待値を求めよ.