〔 **1** 〕 (配点 50 点)

xy 平面上で，$x = r(t)\cos t$，$y = r(t)\sin t$（$0 \leqq t \leqq \pi$）で表される曲線を C とする。

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき，x の最小値と y の最大値を求め，C の概形を図示せよ。

(2) 一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right) dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

(3) (1) で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積 V は

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} e^{-3t} \sin t dt$$

と表せることを示せ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

座標平面上で，不等式 $2|x-4|+|y-5| \leqq 3$，$2||x|-4|+||y|-5| \leqq 3$ が表す領域を，それぞれ A, B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 (x, y) で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_2 |y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形（周は含まない）を単位正方形と呼ぶことにする。p, n を自然数とし，領域

$$D_n = \{(x, y) | 0 \leqq x, x^p \leqq y \leqq n\}$$

を考え，その面積を S_n とする。L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1) グラフ $y = x^p$ （$0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}}$）と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ。また，面積 S_n を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$ を求めよ。

〔 **4** 〕(配点 50 点)

A

空間内に四面体 OABC があり，$\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ はすべて 90° であるとする．辺 OA, OB, OC の長さを，それぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の重心を G とする．

(1) $\angle OGA, \angle OGB, \angle OGC$ がすべて 90° であるための条件を a, b, c の関係式で表せ.

(2) 線分 BC を 1 : 2 に内分する点を D とする．点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く．このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ.

B

$0 < a < 1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z = t + ai$（t は実数全体を動く）が表す直線を l とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数 z が l 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2) 直線 l を, 原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。

〔 **5** 〕 (配点 50 点)

$\boxed{\textbf{C}}$

座標平面上に点 $P(a, b)$ があり，P は $|a| \leqq \dfrac{1}{2}$，$|b| \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動く。また，点 $Q(x, y)$ の座標は連立 1 次方程式 $AX = B$ の解になっている。ただし，

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}$$

である。

(1) 点 P が原点 O にあるときの点 Q の位置を点 R とする。$P \neq O$ のとき，$\dfrac{RQ}{OP}$ の最大値を求め，その最大値を与える点 P の全体を図示せよ。

(2) OQ の最小値と，その最小値を与える点 P の座標を求めよ。

$\boxed{\textbf{D}}$

θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2 > 4b$ を満たす点 $P(a, b)$ から放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ に引いた二つの接線の接点を Q，R とし，接線 PQ，PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle QPR = \theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1) $m_1 < 0 < m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2) G を数式で表せ。

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。

$\boxed{\mathbf{E}}$

n を 2 以上の自然数とする。数列 $\{S_n\}$ が $S_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}$ で与えられている。

(1) 不等式 $\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$ が成り立つことを示せ。

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して，$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ （$k = 1, 2, \cdots$）とおく。数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) p(n)$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ。

(3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ。