

〔 1 〕 (配点 50 点)

実数 a, c を係数とする関数 $f(x) = ax^2 + c$ について, 次の条件を考える.

(*) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $f(x) \geq (x+1)^2$ が成立する.

- (1) $a \geq 2$ のとき, 条件 (*) を満たす最小の c の値は $\frac{a}{a-1}$ であることを示せ.
- (2) $a \leq 2$ のとき, 条件 (*) を満たす最小の c の値は $4-a$ であることを示せ.
- (3) 関数 $f(x)$ が条件 (*) を満たしているとき, 定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ を最小にする a, c と, そのときの定積分の値を求めよ.

〔 2 〕 (配点 50 点)

座標平面上で、不等式 $2|x - 4| + |y - 5| \leq 3$, $2||x| - 4| + ||y| - 5| \leq 3$ が表す領域を、それぞれ A, B とする。

- (1) 領域 A を図示せよ。
- (2) 領域 B を図示せよ。
- (3) 領域 B の点 (x, y) で、 x が正の整数であり y が整数であって、 $\log_2 |y|$ が有理数となる点を、理由を示してすべて求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

A

a, b, c を実数とし, $a > 0$ とする. $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく. 実数 p に対し, x の関数 $px - f(x)$ の最大値を $g(p)$ とおく.

- (1) 2 つの関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が一致するとき, $f(x)$ を求めよ.
- (2) 実数 x に対し, p の関数 $xp - g(p)$ の最大値を $h(x)$ とおく. $h(x)$ を求めよ.
- (3) 直線 $y = px + q$ が点 $(t, f(t))$ で $y = f(x)$ のグラフに接するための必要十分条件は

$$g(p) = pt - f(t) \quad \text{かつ} \quad q = -g(p)$$

であることを示せ.

B

$\{m_k\}$ を公比 r の等比数列とする. 2 次関数 $y = x^2$ のグラフを C とし, C 上に点 P_1 をとる. 各自然数 k に対し, 点 P_k から点 P_{k+1} を順次つぎのように定める.

点 P_k を通り傾き m_k の直線を l_k とし, この直線と C とのもう一つの交点を P_{k+1} とする. ただし, C と l_k が接する場合は $P_{k+1} = P_k$ とする. 点 P_k の x 座標を a_k とする.

- (1) a_{k+1} を a_k と m_k で表せ.
- (2) 数列 $\{a_k\}$ の一般項を a_1, m_1, r, k で表せ.
- (3) $a_1 = \frac{m_1}{1+r}$ とする. このとき, ある 2 次関数 $y = bx^2$ があって, すべての自然数 k に対し直線 l_k がその 2 次関数のグラフに接することを示し, b を r で表せ. ただし, $m_1 \neq 0, r \neq -1, 0$ とする.

C

- (1) 次の流れ図に対応するプログラムを実行する。 $C = 105$ を入力したとき、 X, Y および N の値を出力順にすべて示せ。
- (2) 座標平面上で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。自然数 A, B, R を入力したとき、第 1 象限 (x 軸, y 軸は含まない) にあり、かつ中心が (A, B) で半径が R の円の内部および周上にある格子点の個数と、それらの格子点のうちで原点からの距離が最大である格子点 (複数個あるときは x 座標が最大のもの) の座標を出力するプログラムの流れ図を、方針を記述してから作成せよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

D

空間内に四面体 $OABC$ があり $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ はすべて 90° であるとする. 辺 OA, OB, OC の長さを, それぞれ a, b, c とし, 三角形 ABC の重心を G とする.

- (1) $\angle OGA, \angle OGB, \angle OGC$ がすべて 90° であるための条件を a, b, c の関係式で表せ.
- (2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする. 点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き, 点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く. このとき, 線分 OQ の長さの最小値を求めよ.

E

$0 < a < 1$ である定数 a に対し, 複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を l とする. ただし, i は虚数単位である.

- (1) 複素数 z が l 上を動くとき, z^2 が表す点の軌跡を図示せよ.
- (2) 直線 l を, 原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする. m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin \theta$ の値で場合分けして求めよ.

F

座標平面上に $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて、 $y \leq x(a - x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし、 $0 < a \leq 2$ とする。

- (1) ボールを 1 回落とす。当たる確率を求めよ。
- (2) 1 回目は $a = \frac{1}{2}$, 2 回目は $a = \frac{3}{2}$ として、ボールを 2 回落とす。1 回だけ当たる確率を求めよ。
- (3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす。少なくとも 1 回は当たる確率が $\frac{19}{27}$ 以上であり、当たりの数の期待値が $\frac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。