

〔 1 〕 (配点 50 点)

平面上を運動する点 $P(x, y)$ の時刻 t での x 座標と y 座標が

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

で表されている。ただし、 e は自然対数の底である。原点を O 、点 $(0, 1)$ を M とする。 t が $t \geq 0$ の範囲で変化したとき、点 P が描く曲線を C とする。時刻 t において、曲線 C 、線分 OM 、および線分 OP で囲まれる図形の面積を $A(t)$ で表し、曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を $S(t)$ で表す。次の問いに答えよ。

- (1) 点 $P(x, y)$ の座標 x, y に対して y を x を用いて表せ。
- (2) 時刻 t を用いて $A(t)$ と $S(t)$ を表せ。
- (3) $A(t) - S(t)$ が最大となる時刻 t を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

正の整数 a に対し, a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す. ただし, 1 および a 自身も約数とする. たとえば, $f(1) = 1$ であり, $a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので, $f(15) = 24$ となる. 次の問いに答えよ.

- (1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとする. このとき

$$f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$$

が成り立つことを示せ.

- (2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとする. このとき

$$f(a) \geq (p+1)q$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのは, $q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ.

- (3) 正の偶数 a, b は, ある整数 m, n とある奇数 r, s を用いて $a = 2^m r$, $b = 2^n s$ のように表すことができる. このとき a, b が $f(a) = 2b$, $f(b) = 2a$ をみたせば, r, s は素数であり, かつ $r = 2^{n+1} - 1$, $s = 2^{m+1} - 1$ となることを示せ.

〔 3 〕 (配点 50 点)

次の問いに答えよ.

- (1) すべての正の実数 x, y に対して, 不等式 $x \log x - x \log y - x + y \geq 0$ が成り立つことを示せ. ここで \log は自然対数を表す.
- (2) a, b は実数で $a < b$ とする. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数で,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

をみたす. このとき, 不等式

$$\int_a^b f(x) \log f(x)dx \geq \int_a^b f(x) \log g(x)dx$$

が成り立つことを示せ.

- (3) a, b は実数で $a < b$ とする. 閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

とする. 不等式

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \log f(x)dx \geq M \log M$$

が成り立つことを示せ.

[4] (配点 50 点)

A

空間内の図形について次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積は、 $\frac{1}{2}\sqrt{|AB|^2|AC|^2 - (AB \cdot AC)^2}$ に等しいことを示せ。ここで、 $AB \cdot AC$ はベクトル AB とベクトル AC との内積を表す。必要ならば、2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。
- (2) 右図の平行六面体 $ABCD - EFGH$ を考える。 $|AB| = |AD| = 1$, $|AE| = 2$ とし、 $\angle FBC = \angle BCD = \frac{\pi}{2}$, $\angle EAB = \theta$ とする。ここで θ は $0 < \theta < \pi$ なる定数とする。面 $EFGH$ 上に点 P をとり、点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし、点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。 $x = |EI|$, $y = |EJ|$ とするとき、 $\triangle ACP$ の面積を θ , x , y を用いて表せ。
- (3) 問 (2) で点 P が面 $EFGH$ 上を動くとき、 $\triangle ACP$ の面積の最小値を求めよ。

B

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 をとる。次の問いに答えよ。

- (1) $w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく。点 w_1 は 3 点 z_1, z_2, z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで、三角形の垂心とは、各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり、これらの 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。
- (2) $w_2 = -z_1 z_2 z_3$ とおく。 $w_2 \neq z_1$ のとき、2 点 z_2, z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで \bar{z}_1 は z_1 に共役な複素数である。
- (3) 2 点 z_2, z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点は、点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の midpoint であることを示せ。ただし、 $w_1 = w_2$ のときは、 w_1 と w_2 の midpoint は w_1 と解釈する。

C

平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき、その点を格子点という。与えられた格子点を第 1 番目とし、この点から右斜め 45° または右斜め -45° の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点を取り、この 2 点を線分で結ぶ。同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点を取り、第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し、こうしてできる線分をつないだものを折れ線グラフということにする。上図に原点 O と格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す。次の問いに答えよ。

- (1) n は正の整数、 k は $0 \leq k \leq n$ なる整数とする。原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n+k$ が偶数であることを示せ。また、この必要十分条件がみたされているとき、原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。
- (2) n は 2 以上の整数、 k は $0 \leq k \leq n-2$ なる整数で、 $n+k$ は偶数とする。原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0, k), (1, k), \dots, (n-2, k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は、原点 O と格子点 $(n-1, k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいことを示せ。
- (3) コインを 9 回投げる。1 回から i 回までの試行において、表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 (i, T_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, 9$, を順番に線分をつなげば折れ線グラフが得られる。ただし、 $T_0 = 0$ とする。 $T_9 = 3$ が起きたとき、どの T_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 7$) も 3 にならない条件つき確率を求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

□ D

平面上の点 P の x 座標と y 座標が, 変数 θ の関数 $f(\theta) = \frac{(\theta - \pi)^2}{2\pi^2} + \frac{1}{2}$ を用いて,

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta$$

と表されている。 θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で変化したとき, 点 P が描く曲線を C とする。点 P を $P(\theta)$ で表し, $P_1 = P(0)$, $P_2 = P\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $P_3 = P(\pi)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 方程式

$$\frac{(x - \alpha)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする。このとき, 点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる (ただし楕円の上にはない) ための必要十分条件を α のみを用いて表せ。

(2) 点 P_2 における曲線 C の接線を l とする。 l の方程式を求めよ。

(3) 次の条件 (i)(ii)(iii) をみたす楕円 D を考える。

(i) D の軸の 1 つは x 軸上にある。

(ii) D は点 P_1, P_2 を通る。

(iii) 点 P_2 における D の接線は l である。

このとき, 点 P_3 は楕円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ。

E

正の実数 a の 3 乗根 $\sqrt[3]{a}$ を近似することを考える. 与えられた 2 以上の整数 p に対して関数 $f(x), g(x)$ を

$$\begin{cases} f(x) = x^p - ax^{p-3} \\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

とする. ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である. 次の問いに答えよ.

(1) $g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \times \frac{x}{x} \text{ の 2 次式の 3 次式}$$

の形で表されることを示せ.

(2) $p = 2$ とする. このとき, $g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^3 \times \frac{x}{x} \text{ の 1 次式の 3 次式}$$

の形で表されることを示せ.

(3) $a = 9, p = 2$ とする. $2 < \sqrt[3]{9} < 2.1$ に注意して, 不等式

$$0 < \sqrt[3]{9} - g(2) < \frac{1}{1000}$$

が成り立つことを示せ. また, $\sqrt[3]{9}$ を小数第 3 位まで求めよ (すなわち, 小数第 4 位以下を切り捨てよ).

F

2次の正方行列 A が単位行列でなく $A^2 = A$ をみたすとき、べき等行列という。次の問いに答えよ。

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ はべき等行列であり、かつ $ad - bc \neq 0$ とする。このとき、 A を求めよ。
- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad - bc = 0$ をみたすとする。このとき、 A がべき等行列であるための必要十分条件を a と d のみを用いて表せ。
- (3) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ はともにべき等行列とする。 $A + B$ がべき等行列になるとき、 $A + B$ を求めよ。また、そのような A, B の組を1つあげよ。