

〔 1 〕 (配点 50 点)

関数 $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える。

- (1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ。
- (2) $a = 0$ のとき、関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

- (1) xy 平面上の点 (p, q) に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。
- (2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。
- (3) 直線 $mx + ny = 0$ に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。
ただし, m, n は共には 0 でないとする。
- (4) G は原点を通るどんな直線に対しても線対称でないことを示せ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える．円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直行する平面による切り口は半径 r の円である．正四角柱の中心軸は z 軸で， xy 平面による切り口は一辺の長さが $\frac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である． $0 < r \leq \sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする．

- (1) 高さが $z = t$ ($-r \leq t \leq r$) で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ．
- (2) K の体積 $V(r)$ を求めよ．
- (3) $0 < r \leq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ．

〔 4 〕 (配点 50 点)

A

複素数平面上の点 z を考える。

- (1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\bar{z} + bz + b\bar{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき、どのような図形を描くか。ただし、 $\bar{z}$ は z に共役な複素数を表す。

- (2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p, q に対して

$$d(z - p)(\bar{z} - \bar{q}) = \bar{d}(z - q)(\bar{z} - \bar{p})$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか。

B

m, n を自然数とする。次の算法を考える。

- (1) $m = 100$ のとき、3 周目と 4 周目の (b) における i, j, k の値を求めよ。たとえば 1 周目では $i = 100, j = n, k = 0$ である。
- (2) 一般の m に対して、(b) における i, j, k の値について $i * j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ。
- (3) 一般の m に対して、 Ams を求めよ。
- (4) l を自然数とする。 $m = 3 \cdot 2^l$ のとき、終了するまでに何回 (d) を実行するか。

〔 5 〕 (配点 50 点)

□ C

関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし, 関数 $y = f(x)$ のグラフ G 上の点 $P(t, f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする. ただし $\theta(t)$ は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正, 負, 0 に従って正, 負, 0 の値をとるものとする. また, 点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $Q(\alpha(t), \beta(t))$ を G の下側にとる.

- (1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ.
- (2) $\alpha(t), \beta(t)$ を求めよ.
- (3) t が a から b ($a < b$) まで変化するとき, 点 P, Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1, L_2 とする. $L_2 - L_1$ を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ.

D

(1) e を自然対数の底とし,

$$f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

とおく。 $0 < x < 1$ においては $0 < f(x) < x^3$ が成り立つことを示せ, また

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

を示せ, 必要であれば $e < 3$ を使ってよい。

(2) 関数 $g(x) = e^x$ を考える。区間 $0 \leq x \leq 1$ を n 個の小区間に等分して, 各小区間を底辺, 小区間の左端の点における関数 $g(x)$ の値を高さとする長方形の面積の和を K_n とする。 $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$n^k \left| \int_0^1 g(x) dx - K_n \right|$$

が有限の値に収束するような最大の自然数 k とそのときの極限値を求めよ。

E

p, q を整数とし, x, y を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 4x + 9y = p \\ 2x + 6y = q \end{cases}$$

を考える。

- (1) この方程式を行列を用いて表し, 係数行列の逆行列を求めよ。
- (2) 上の連立方程式の解 x, y が共に整数であるような組 (p, q) をすべて求めよ。ただし, $0 \leq p \leq 5, 0 \leq q \leq 5$ とする。
- (3) 正の整数 d で, 「 d のどんな倍数 p, q に対しても上の連立方程式の解 x, y が整数になる」ものが存在することを示せ。
- (4) (3) における d のうちで最小のものを求めよ。