〔 **1** 〕 (配点 50 点)

関数 $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a,b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための a,b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 (p, q) に関する，点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) y 軸に平行な直線 $x = p$ に関する，点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。

(4) G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

A

数列 a_n を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で与える。$a_1, \ldots, a_n$ の積を P_n とおく。

(1) 各 n について $a_n > 0$ であることを示せ。

(2) 各 n について $a_{n+1} = P_n + 1$ であることを示せ。

(3) $S_n = \dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$ とおく。S_1, S_2, S_3, S_4 を求めよ。

(4) 各 n について S_n を P_n で表せ。

B

(1) 自然数 a, b が互いに素であるとはどういうことか。

(2) 自然数 a, b が互いに素であるなら a^2, b^2 は互いに素であることを示せ。

(3) n を自然数とする。もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ。ただし，有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである。

(4) n が自然数のとき，$\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ。

$\boxed{\mathbf{C}}$

r を 1 より小さい正の定数とする．平面上の点 A を端点とする半直線 l 上の点で A からの距離が $1-r$, 1, $1+r$ となるものをそれぞれ B, C, D とする．BD を直径とする円を描き，A を端点としての円に接する半直線のひとつを m とする．m 上の点で A からの距離が $1-r$, 1, $1+r$ となるものをそれぞれ E, F, G とする．E, F を通り l に接する円を描きその接点を P とする．また F, G を通り l に接する円を描きその接点を Q とする．

(1) A と P との間の距離 AP を r で表せ.

(2) CF を r で表せ.

(3) $PQ = CF$ を示せ.

〔 **4** 〕 (配点 50 点)

$\boxed{\textbf{D}}$

複素数平面上の点 z を考える.

(1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき，どのような図形を描くか．ただし，$\bar{z}$ は z に共役な複素数を表す.

(2) 0 でない複素数 d に対して

$$dz(z+1) = \overline{dz}(z+1)$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか.

$\boxed{\textbf{E}}$

サイコロを n 回振って，出た目を小さい方から順に並べ，第 i 番目を X_i $(i = 1, \cdots, n)$ とする.

(1) $n = 7$ のとき，3 の目が 3 回，5 の目が 2 回出たとする．このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ.

(2) 一般の n に対して，$X_1 = 2$ となる確率 $P(X_1 = 2)$ を求めよ.

(3) 一般の n に対して，X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ.

(4) 一般の n に対して，期待値 $E(X_1 + X_n)$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{F}}$

m, n を自然数とする．次の算法を考える．

(a) $i = m$, $j = n$, $k = 0$.

(b) $i = 1$ ならば $Ans = k + j$ として終了する．

(c) i の値が奇数なら $k = k + j$ とする．

(d) $i = [i/2]$.

(e) $j = 2 \times j$.

(f) (b) に戻る．

（ここで，$[x]$ は x を越えない最大の整数を表す.）

(1) $m = 100$ のとき，3 周目と 4 周目の (b) における i, j, k の値を求めよ．たとえば 1 周目では $i = 100$, $j = n$, $k = 0$ である．

(2) 一般の m に対して，(b) における i, j, k の値について $i \times j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ.

(3) 一般の m に対して，Ans を求めよ．