

〔 1 〕 (配点 50 点)

原点を O ，直線 $x = 1$ 上の動点を P ，中心 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ，半径 $\frac{1}{2}$ の円を C とする。線分 OP と C との交点で原点でないものを Q とし， OP 上に $OR = PQ$ を満たす点 $R(x, y)$ をとる。

- (1) 点 P を動かしたとき，点 R の軌跡を表す方程式を x と y とで表せ。
- (2) m, n を 100 以下の自然数として，点 $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ が (1) で求めた曲線上にあるような組 (m, n) をすべて求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

実数 p, q, r を係数とする関数 $f(x) = px^2 + qx + r$ をここでは高々 2 次の関数とよぶことにする。また, a, b, c は異なる 3 つの実数とする。

(1) $f(a) = 1, f(b) = 0, f(c) = 0$ を満たす高々 2 次の関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 高々 2 次の関数 $f(x), g(x)$ が

$$f(a) = g(a), \quad f(b) = g(b), \quad f(c) = g(c)$$

を満たすならば $f(x)$ と $g(x)$ は同じ関数であることを示せ。

(3) $h(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ とすると,

$$\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{h'(a)(x - a)} + \frac{1}{h'(b)(x - b)} + \frac{1}{h'(c)(x - c)}$$

であることを示せ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

A

係数が 0 か 1 である α の整式を, ここでは M 多項式とよぶことにする. 整数を係数とする α の整式は, 偶数の係数を 0 でおきかえ, 奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる. 2 つの整式は, このおきかえによって等しくなるとき合同であるという. 例えば, $5x^2 + 4x + 3$ と $x^2 - 1$ とは対応する M 多項式が共に $x^2 + 1$ となるので, 合同である.

M 多項式は, 2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい, 可約でないとき既約であるという. 例えば, $x^2 + 1$ は $(x + 1)^2$ と合同であるから, 可約である.

- (1) $x^2 + x + 1$ は既約な M 多項式であることを示せ.
- (2) 1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ.
- (3) $x^4 + x + 1$ は既約な M 多項式かどうか判定せよ.

B

下記の各命題についてその真偽を記し，理由を述べよ．

- (1) $\sqrt{7}$ は無理数である．
- (2) 和も積も共に 0 でない有理数であるような 2 つの実数 a, b は，共に有理数である．
- (3) 無理数は何乗かすると有理数になる．ただし，ここで何乗かするというのは， n を 1 以上のある整数として n 乗することである．
- (4) 和も積も共に有理数であるような 2 つの実数 a, b に対して， $a^5 + b^5$ は有理数である．

C 正五角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E とし，線分 AC と BD の交点を F, BD と CE の交点を G, CE と DA の交点を H, DA と EB の交点を I, EB と AC の交点を J とする．

- (1) 三角形 ABF と三角形 AFH は合同な三角形であることを示せ．
- (2) 三角形 ABJ の面積と三角形 FGHIJ の面積はどちらが大きいのか検討せよ．
- (3) 星形 AJBFCGDHEIA の面積と，正五角形 ABCDE からその星形を除いた残りの部分の面積は，どちらが大きいのか検討せよ．

〔 4 〕 (配点 50 点)

D

表のでる確率が $\frac{1}{2}$ の公平な（歪みのない）コインが n 枚，表のでる確率が $\frac{3}{4}$ の歪んだコインが 1 枚ある．公平なコインはそれぞれを 2 回投げ，2 回共に表がでた場合にそのコインを用意した箱に入れる．また，歪んだコインは n 回投げで n 回すべてが表であったらその箱に入れる．全部のコインについてこれを行ったとき，箱に入っているコインの枚数を X とする．

- (1) $n = 2$ のとき， $P(X \geq 1)$ と X の期待値を求めよ．
- (2) $P(X \geq 1) > \frac{13}{16}$ となる最小の n を求めよ．
- (3) X の期待値と分散を n を用いて表せ．

E

1 から n までの数で m 個からなる重複しない数の順列を作り出す算法として、下記のことを考えた。ただし、 S は順列を表し、算法の開始の時は数を含まない (S は空であるという) とする。算法の終了時には結果として順列を得るものとする。

算法 [以下 (a), (b), (c), … の順に行う]

- (a) S を空とし、 $j = n - m + 1$ とする。
 - (b) 1 から j までの数からデタラメに数 t を選ぶ。
 - (c) t が順列 S に入っているならば、 t の直後に j を入れ、そうでないならば、 t を S の先頭に入れる。
 - (d) j を 1 増やす。
 - (e) $j \leq n$ ならば、(b) へもどる。 $j > n$ ならば、終了する。
- (1) $n = 10$, $m = 6$ の場合で (b) において選ばれた数 t は順に 4, 3, 6, 3, 2, 5 であった。その結果として得られる順列 S はどのような順列か。
- (2) $n = 10$, $m = 6$ の場合で結果として得られた順列 S が 827593 であった。(b) で選ばれた数 t の列は何であったか。
- (3) 算法の結果として得られた順列 S から (b) において選ばれた数の列を復元する算法を記述せよ。

F

空間内に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ をとる.

- (1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$ を満たしながら動くとき, この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ.
- (2) (1) における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ.
- (3) (1) における P について, 四面体 $ABCD$ の体積の最大値を求めよ.