$\boxed{\textbf{1}}$

(30 点)

問 1　x, y, z は実数で

$$2025^x = 3^y = 5^x$$

を満たすとする．このとき $2xy + 4xz - yz = 0$ であることを示せ．

問 2　$n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ．

$\boxed{\textbf{2}}$

(30 点)

実数 a, b についての次の条件 (*) を考える．

(*) ある実数係数の 2 次式 $f(x)$ と，ある実数 c に対して，x についての恒等式

$$\frac{1}{8}x^4 + ax^3 + bx^2 = f(f(x)) + c$$

が成り立つ．

この条件 (*) を満たす点 (a, b) 全体の集合を座標平面上に図示せよ．

$\boxed{\textbf{3}}$

(30 点)

n は正の整数とする．1 枚の硬貨を投げ，表が出たら 1，裏が出たら 2 と記録する．この試行を n 回繰り返し，記録された順に数字を左から並べて n 桁の数 X を作る．ただし，数の表し方は十進法とする．このとき，X が 6 で割り切れる確率を求めよ．

4

(30 点)

座標平面において，曲線 $C_1 : y = x^2 - 2|x|$，曲線 $C_2 : y = x^2 - 5x + \dfrac{7}{4}$，直線 $l_1 : x = -\dfrac{3}{2}$ を考える．

(1) 点 $(0, 0)$ と異なる点で C_1 と接し，さらに C_2 とも接するような直線 l_2 がただ一つ存在することを示せ．

(2) C_1 と l_2 の共有点を P とし，その x 座標を a とする．また，l_1 と l_2 の共有点を Q とし，C_1 と l_1 の共有点を R とする．曲線 C_1 の $a \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ の部分，線分 PQ，および線分 QR で囲まれる図形の面積を求めよ．

5

(30 点)

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする．s, t, u は 0 でない実数とする．直線 OA 上の点 L, 直線 OB 上の点 M, 直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{OL} = s\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{ON} = u\overrightarrow{OC}$$

が成り立つようにとる．s, t, u が $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき，3 点 L, M, N の定める平面 LMN は，s, t, u の値に無関係な一定の点を通ることを示せ．

問題は，このページで終わりである．