

**1**

(30点)

四面体  $OABC$  が次を満たすとする。

$$OA = OB = OC = 1, \quad \angle COA = \angle COB = \angle ACB, \quad \angle AOB = 90^\circ$$

このとき、四面体  $OABC$  の体積を求めよ。

**2**

(30点)

$n$  個の異なる色を用意する。立方体の各面にいずれかの色を塗る。各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする。辺を共有する二つの面に異なる色が塗られる確率を  $p_n$  とする。次の問いに答えよ。

(1)  $p_3$  を求めよ。

(2)  $p_4$  を求めよ。

**3**

(30点)

$a$  は正の定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$f(x) = \left| x^2 - \left( ax + \frac{3}{4}a^2 \right) \right| + ax + \frac{3}{4}a^2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

4

(30点)

ある自然数を八進法、九進法、十進法でそれぞれ表したとき、桁数がすべて同じになった。このような自然数で最大のものを求めよ。ただし、必要なら次を用いてもよい。

$$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011, \quad 0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$$

5

(30点)

関数  $y = x^2 - 4x + 5$  のグラフの  $x > 1$  の部分を  $C$  とする。このとき、下の条件を満たすような正の実数  $a, b$  について、座標平面の点  $(a, b)$  が動く領域の面積を求めよ。

[ $C$  と直線  $y = ax + b$  は二つの異なる共有点を持つ。]

問題は、このページで終わりである。