1

(20 点)

a は正の実数とし，座標平面内の点 (x_0, y_0) は 2 つの曲線

$$C_1 : y = |x^2 - 1|, \quad C_2 : y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり，$|x_0| \neq 1$ を満たすとする．C_1 と C_2 が (x_0, y_0) で共通の接線をもつとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

2

(20 点)

1 辺の長さが 1 の正方形 $ABCD$ において，辺 BC 上に B とは異なる点 P を取り，線分 AP の垂直二等分線が辺 AB，辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q，R とする．

(1) 線分 QR の長さを $\sin \angle BAP$ を用いて表せ．

(2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ．

3

(20 点)

$n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

4

(20 点)

四面体 $ABCD$ は $AC=BD$, $AD=BC$ を満たすとし，辺 AB の中点を P, 辺 CD の中点を Q とする．

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ．

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 $ABCD$ を切って 2 つの部分に分ける．このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ．

5

(20 点)

整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して，次の一連の操作を考える．ただし各球に書かれている整数は 1 つのみとする．

(i) 袋から無作為に球を 1 個取り出し，その球に書かれている整数を k とする．

(ii) $k \neq 0$ の場合，整数 k が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す．

(iii) $k=0$ の場合，袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より 1 大きい整数が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す．

整数 0 が書かれている球が 1 個入っており他の球が入っていない袋を用意する．この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に，袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする．例えば X_1 は常に 1 である．以下 $n \geqq 2$ として次の問に答えよ．

(1) $X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ．

(2) $X_n \leqq n+1$ である確率を求めよ．

問題は，このページで終わりである。