

1

(35 点)

四面体 $ABCD$ において CA と CB 、 DA と DB 、 AB と CD はそれぞれ垂直であるとする。このとき、頂点 A 、頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ。

2

(35 点)

x を正の実数とする。座標平面上の 3 点 $A(0, 1)$ 、 $B(0, 2)$ 、 $P(x, x)$ をとり、 $\triangle APB$ を考える。 x の値が変化するとき、 $\angle APB$ の最大値を求めよ。

3

(35 点)

a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし、曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)、曲線 $y = a \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S : T = 3 : 1$ となるような a の値を求めよ。

4

(35 点)

$1 < a < 2$ とする。3 辺の長さが $\sqrt{3}$ 、 a 、 b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする。このとき a を用いて b を表せ。

5

(30 点)

- (1) n を正の整数、 $a = 2^n$ とする。 $3^a - 1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ。
- (2) m を正の偶数とする。 $3^m - 1$ が 2^m で割り切れるならば $m = 2$ または $m = 4$ であることを示せ。

6

(30 点)

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし、どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。このとき、極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{n}$$

を求めよ。

問題は、このページで終わりである。