

1

(30 点)

実数 a, b, c に対して $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする。このとき

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2) \{f'(x)\}^2 dx \leq 6 \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx$$

であることを示せ。

2

(30 点)

$AB = AC$ である二等辺三角形 ABC を考える。辺 AB の中点を M とし、辺 AB を延長した直線上に点 N を、 $AN : NB = 2 : 1$ となるようにとる。このとき $\angle BCM = \angle BCN$ となることを示せ。ただし、点 N は辺 AB 上にはないものとする。

3

(30 点)

定数 a は実数であるとする。方程式

$$(x^2 + ax + 1)(3x^2 + ax - 3) = 0$$

を満たす実数 x はいくつあるか。 a の値によって分類せよ。

4

(30 点)

$0 \leq x < 2\pi$ のとき、方程式

$$2\sqrt{2}(\sin 3x + \cos 3x) + 3 \sin x \cos x = 0$$

を満たす x の個数を求めよ。

5

(30 点)

正 n 角形とその外接円を合わせた図形を F とする。 F 上の点 P に対して、始点と終点がともに P であるような、図形 F の一筆書きの経路の数を $N(P)$ で表す。正 n 角形の頂点をひとつとって A とし、 $a = N(A)$ とおく。また正 n 角形の辺をひとつとってその中点を B とし、 $b = N(B)$ とおく。このとき a と b を求めよ。

注: 一筆書きとは、図形を、書き始めから終わりまで、筆を紙から離さず、また同じ線を通らずに書くことである。

問題は、このページで終わりである。