

1

(30 点)

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $A^6 + 2A^4 + 2A^3 + 2A^2 + 2A + 3E$ を求めよ。

2. 四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 O にあり, 1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する。

規則: 点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに, 等しい確率で移動する。

このとき, n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ。

2

(30 点)

3 次関数 $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ のグラフ上の点 (1, 0) における接線を ℓ とする。この 3 次関数のグラフと接線 ℓ で囲まれた部分を x 軸の周りに回転して立体を作る。その立体の体積を求めよ。

3

(30 点)

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0, \quad ad - bc + p = 0, \quad a \geq b \geq c \geq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ。

4

(30 点)

座標空間で点 $(3, 4, 0)$ を通りベクトル $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ に平行な直線を ℓ , 点 $(2, -1, 0)$ を通りベクトル $\mathbf{b} = (1, -2, 0)$ に平行な直線を m とする。点 P は直線 ℓ 上を, 点 Q は直線 m 上をそれぞれ勝手に動くとき, 線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

5

(30 点)

n を 1 以上の整数とするとき, 次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは証明し, 正しくないときはその理由を述べよ。

命題 p : ある n に対して, $\sqrt{n} \pm \sqrt{n+1}$ は共に有理数である。

命題 q : すべての n に対して, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ は無理数である。

問題は, このページで終わりである。