

1

(30 点)

$$f(\theta) = \cos 4\theta - 4 \sin^2 \theta$$

とする。 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。

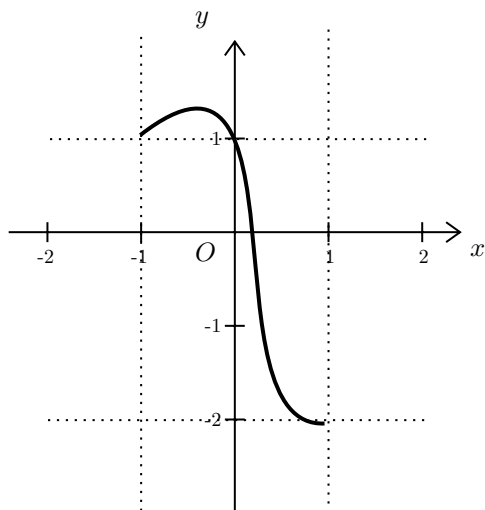
2

(30 点)

区間 $-1 \leq x \leq 1$ で定義された関数 $f(x)$ が、

$$f(-1) = f(0) = 1, \quad f(1) = -2$$

を満たし、またそのグラフが下図のようになっているという。



このとき、

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \geq -1$$

を示せ。

3

(30 点)

$\triangle OAB$ において、 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ とする。

$$|\mathbf{a}| = 3, \quad |\mathbf{b}| = 5, \quad \cos(\angle AOB) = \frac{3}{5}$$

とする。このとき、 $\angle AOB$ の 2 等分線と、 B を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円との交点の、 O を原点とする位置ベクトルを、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ を用いて表せ。

4

(30 点)

c を実数とする。 x についての 2 次方程式

$$x^2 + (3 - 2c)x + c^2 + 5 = 0$$

が 2 つの解 α 、 β を持つとする。複素平面上の 3 点 α 、 β 、 c^2 が三角形の 3 頂点になり、その三角形の重心は 0 であるという。 c を求めよ。

5

(30 点)

n 、 a 、 b を 0 以上の整数とする。 a 、 b を未知数とする方程式

$$a^2 + b^2 = 2^n$$

を考える。

- (1) $n \geq 2$ とする。 a 、 b が方程式を満たすならば、 a 、 b はともに偶数であることを証明せよ。(ただし、0 は偶数に含める。)
- (2) 0 以上の整数 n に対して、方程式を満たす 0 以上の整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

問題は、このページで終わりである。