

1 次の問に答えよ。

(1) 自然数 m, n について、 $2^m \cdot 3^n$ の正の約数の個数を求めよ。

(2) 6912 の正の約数のうち、12 で割り切れないものの総和を求めよ。

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について考える。

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n - \frac{3^{n+1}}{n(n+1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくとき、 b_{n+1} を b_n と n の式で表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3 a を 0 でない実数とする。 C を $y = -x^3 + x^2$ で表される曲線, ℓ を $y = a$ で表される直線とし, C と ℓ は共有点をちょうど 2 つもつとする。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) C と ℓ の共有点の x 座標をすべて求めよ。
- (3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

4 各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」、「2」、「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり, 残りの 5 つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて, 出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は 0 とし, この試行を繰り返す。例えば, 3 回の試行を行ったとき, 出た面に書かれた数が「0」、「2」、「3」であれば, 持ち点は 5 となる。なお, さいころが水平な床面にあるとき, さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また, さいころを投げるとき, 各面が出ることは同様に確からしいとする。

- (1) この試行を 2 回行ったとき, 持ち点が 1 である確率を求めよ。
- (2) この試行を 4 回行ったとき, 持ち点が 10 以下である確率を求めよ。