

1 初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ を求めよ。

2 三角形 OAB において、辺 AB を 2:1 に内分する点を D 、直線 OA に関して点 D と対称な点を E 、点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

とし、 $|\vec{a}| = 4$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $9\overrightarrow{OE} = 20\overrightarrow{OF}$ となるとき、 $|\vec{b}|$ の値を求めよ。

3 実数 x に対して,

$$f(x) = \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 2 \sin^2 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + 4 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$$

とおく。

(1) $t = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$ とおく。 $\sin^2 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)$ と $\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$ をそれぞれ t の式で表せ。

(2) $0 \leq x \leq \pi$ のとき, 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

4 k を $k > -1$ を満たす実数とする。直線 $l: y = (1-k)x + k$ および放物線 $C: y = x^2$ を考える。 C と l で囲まれた部分の面積を S_1 とし, C と l と直線 $x = 2$ の 3 つで囲まれた部分の面積を S_2 とする。

(1) S_1 を k を用いて表せ。

(2) S_2 を k を用いて表せ。

(3) k が $k > -1$ を満たしながら動くとき, $S_2 - S_1$ の最大値を求めよ。