$\boxed{\mathbf{1}}$ $p$ を負の実数とする。座標空間に原点 $O$ と 3 点 $A(-1,2,0)$、$B(2,-2,1)$、$P(p,-1,2)$ があり、3 点 $O,A,B$ が定める平面を $\alpha$ とする。また、点 $P$ から平面 $\alpha$ に垂線を下ろし、$\alpha$ との交点を $Q$ とする。

(1) $\overrightarrow{OQ}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$ となる実数 $a,b$ を $p$ を用いて表せ。

(2) 点 $Q$ が $\triangle OAB$ の周または内部にあるような $p$ の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $x$ を正の実数とし、座標平面上に 3 点 $A(x,0)$、$B(-2,2)$、$C(-3,3)$ をとる。直線 $AB$ と直線 $AC$ のなす角を $\theta$ とする。ただし、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) $\tan\theta$ を $x$ で表せ。

(2) $x>0$ における $\tan\theta$ の最大値およびそのときの $x$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $n$ を自然数とする。数列 2, 1, 2, 1, 1 のように各項が 1 または 2 の有限数列（項の個数が有限である数列）を考える。各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が $n$ となるものの個数を $s_n$ とする。例えば、$n=1$ のときは、1 項からなる数列 1 のみである。したがって、$s_1 = 1$ となる。$n=2$ のときは、1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列 1, 1 の 2 つである。したがって、$s_2 = 2$ となる。

(1) $s_3$ を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ のとき、$s_n$ を $s_{n-1}$ と $s_{n-2}$ を用いて表せ。

(3) 3 以上のすべての $n$ に対して $s_n - \alpha s_{n-1} = \beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 $\alpha, \beta$ の組 $(\alpha, \beta)$ を 1 組求めよ。

(4) $s_n$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 実数 $a, b, c$ に対し、関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり、$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は、すべての $x$ に対し等式

$$f(x) = f'(x)g(x) - 6x$$

を満たしているとする。

(1) $b$ と $c$ を $a$ で表せ。

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつように、$a$ の値の範囲を定めよ。