

1 n を自然数とする。

(1) 次の等式を示せ。

$$(a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$$

(2) $w = \frac{10^n(n+1) - 2^{n+1}}{10^n - 2}$ とおく。 w は整数であることを示せ。また、 w を 10^n で割った余りは 2^n であることを示せ。

(3) 実数 x に対し、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

$$\left[\frac{10^n(n+1)}{10^n - 2} \right]$$

を 10^n で割った余りを求めよ。

2 z を虚部が正である複素数とし、 $O(0)$, $P(2)$, $Q(2z)$ を複素数平面上の 3 点とする。 $\triangle OPR$, $\triangle PQS$, $\triangle QOT$ は $\triangle OPQ$ の内部と重ならない正三角形とし、3 点 U , V , W をそれぞれ $\triangle OPR$, $\triangle PQS$, $\triangle QOT$ の重心とする。

(1) 3 点 U , V , W が表す複素数をそれぞれ z で表せ。

(2) $\triangle UVW$ は正三角形であることを示せ。

(3) z が $|z - i| = \frac{1}{2}$ を満たしながら動くとき、 $\triangle UVW$ の重心 G の軌跡を複素数平面上に図示せよ。ただし、 i は虚数単位を表す。

3 十分な数の赤玉と青玉が手元にあるものとする。 a と n を自然数とし、はじめに、空の袋に a 個の赤玉を入れておく。以下の試行を繰り返す。袋の中から玉を 1 個取り出し、それが赤玉ならば青玉を 1 個袋に入れ、青玉ならば赤玉を 1 個袋に入れる。さらに、取り出した玉自体も袋に戻し、袋の中の玉をよくかき混ぜる。結果として、1 回の試行ごとに袋の中にある玉は 1 個ずつ増える。この試行を繰り返したとき、 n 回目の試行後に袋に入っている赤玉の個数が k である確率を $p_n(k)$ で表す。例えば、 $p_1(k)$ の値は k が a のとき 1、そのほかの場合は 0 である。また、 $M_n = \sum_{k=0}^{a+n} kp_n(k)$ とする。

- (1) $p_2(k)$ を求めよ。
- (2) $p_{n+1}(k+1) = Bp_n(k) + Cp_n(k+1)$ と表すとき、 B と C を a, k, n で表せ。
- (3) $M_1 = a$, $M_{n+1} = \frac{a+n-1}{a+n}M_n + 1$ を示せ。
- (4) (3) の式を満たす数列 $\{M_n\}$ の一般項を求めよ。さらに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n}$ を求めよ。

4 $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ とし、曲線 $y = f(x)$ を C とする。また、 $s > 1$ とし、 $0 \leq x \leq \log s$ の範囲における C の長さを $L(s)$ とする。ただし、 $\log s$ は s の自然対数であり、 e は自然対数の底である。

- (1) $L(s)$ を s で表せ。
- (2) P を x 座標が $\log s$ であるような C 上の点とし、この点での C の接線を l とする。 $Q(v, w)$ を $v < \log s$ かつ $PQ = L(s)$ を満たす l 上の点とすると、 v と w を s で表せ。
- (3) (2) において、 s が 1 より大きい実数を動くとき、点 $R(-v + \log s, w)$ の軌跡を座標平面上に図示せよ。