

1 自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して, $n(n+1) + a = (n+k)^2$ が成り立つとき,

$$a = k^2 + 2kn - n$$

が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1) + 7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

2 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。円 C の内部に点 A がある。円 C の周上を 2 点 P, Q が条件 $AP \perp AQ$ を満たしながら動く。線分 PQ の中点を R とする。また, $OA=\alpha$, $\angle AOP=\gamma$, $\angle POQ=\beta$, $\angle AOQ=\phi$ とする。ただし, $0 < \gamma < 1$ とする。

(1) $|AR|$ を α, γ, ϕ を用いて表せ。

(2) 直線 OA 上の点 B で, $|BR|$ が 2 点 P, Q の位置によらず一定であるものを求めよ。また, このときの $|BR|$ の値を α を用いて表せ。

3 正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある。点 P は、1 秒ごとに、隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\frac{a}{3}$ で移るか、もとの頂点に確率 $1 - a$ で留まる。初め頂点 A にいた点 P が、 n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする。ただし、 $0 < a < 1$ とし、 n は自然数とする。

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 確率 p_n を求めよ。

4 a, b を実数とし、関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \int_0^x f(t)dt$$

を満たすとする。

(1) $f(x)$ を a, b を用いて表せ。

(2) 関数 $f(x)$ が $x > 1$ の範囲で極大値を持つとする。このような a, b が満たす条件を求めよ。また、点 (a, b) の存在範囲を座標平面上に図示せよ。