

1 $0 < t \leq 2$ とし、媒介変数 θ を用いて

$$x = \cos 3\theta, \quad y = \sin 3\theta \quad (0 \leq \theta \leq t)$$

と表される曲線の長さを $l(t)$ とおく。

(1) $l(t)$ を求めよ。

(2) 原点 $O(0, 0)$ と点 $P(\cos 3t, \sin 3t)$ の距離を $k(t)$ とおく。 $0 < t \leq 2$ において、

$$\frac{k(t)}{l(t)}$$

の最小値とそのときの P の座標を求めよ。

2 3 点 $O(0, 0)$, $A(a, a^2)$, $B(b, b^2 + 1)$ を考える。

(1) a が $0 < a < 2$ をみたすとき、 $\triangle OAB$ が不等式

$$x^2 \leq y \leq x^2 + 1$$

の表す領域に含まれるための b の条件を a を用いて表せ。

(2) a, b が (1) の条件をみたすとき、 $\triangle OAB$ の面積の最大値とそのときの a, b の値を求めよ。

3 複素数平面上の 2 点 $P(z)$, $Q(w)$ が次の 2 つの条件をみたすとする。ただし, $O(0)$ は原点である。

- 線分 OP の長さと線分 OQ の長さの積が 1 に等しい。
- O を端とする半直線 OP 上に Q がある。

- (1) z を w を用いて表せ。
- (2) 点 $A(1-i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から O を除いた曲線の上を P が動くとき, Q の軌跡を図示せよ。ただし, i は虚数単位である。
- (3) $r > 0$ とし, β を絶対値 $|\beta|$ が r に等しくない複素数とする。 P が点 $B(\beta)$ を中心とする半径 r の円上を一周するとき, Q の軌跡を求めよ。

4 自然数 n に対して

$$a_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$$

とおく。

- (1) a_1, a_2 を求め,

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。

- (2) a_{13} と a_{14} の 1 の位の数それぞれ求めよ。
- (3) $[(1 + \sqrt{2})^{1000}]$ の 1 の位の数求めよ。ただし, 実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。たとえば $[1 + \sqrt{2}] = 2$ である。