1 2つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = -(x-1)^2$$

がある。a は 0 でない実数とし，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a\ , a^2\ )$，$\mathrm{Q}(-2a\ , 4a^2\ )$ を通る直線と平行な C_1 の接線を ℓ とする。

(1) ℓ の方程式を a で表せ。

(2) C_2 と ℓ が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) C_2 と ℓ が異なる 2 つの共有点 R，S をもつとする。線分 PQ の長さと線分 RS の長さが等しくなるとき，a の値を求めよ。

2 p は 0 でない実数とし

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{p}a_n - (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n = p^n a_n$ とする。b_{n+1} を b_n, n, p で表せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面において、一直線上にない 3 点 O、A、B がある。O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ は $\overrightarrow{AB}$ に垂直であるとする。

(1) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}$ を示せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ のなす角を α とする。ただし、$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。このときベクトル $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ のなす角が $\pi-\alpha$ であることを示せ。

(3) $\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OB}|}$ を示せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプのカードを 1 列に並べる試行を考える。

(1) 番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ。

(2) 番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い、4 枚連続しては並ばない確率を求めよ。