1　2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2 + \frac{3}{2}, \quad C_2 : y = (x-a)^2 + a \quad (a > 0)$$

がある。点 $P_1(p\ , -p^2 + \dfrac{3}{2}\ )$ における C_1 の接線を ℓ_1 とする。

(1) C_1 と C_2 が共有点を持たないための a に関する条件を求めよ。

(2) ℓ_1 と平行な C_2 の接線 ℓ_2 の方程式と，ℓ_2 と C_2 の接点 P_2 の座標を a, p を用いて表せ。

(3) C_1 と C_2 が共有点を持たないとする。(2) で求めた P_2 と P_1 を結ぶ線分が ℓ_1 と垂直になるとき，p を求めよ。

2　次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n \quad (n = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ , \cdots)$$

(1) 以下が成立するように，実数 $s, t (s > t)$ を定めよ。

$$\begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \qquad (n = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ , \cdots)$$

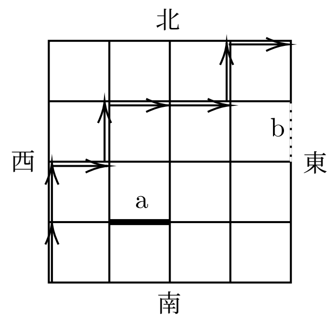
(2) 一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle$ABC を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし、その外接円の中心を O とする。正の実数 p に対して、BC を $(p+1):p$ に外分する点を D とし、線分 AD と $\triangle$ABC の外接円との交点で A と異なる点を X とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OC}$、p を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{OX}$ を $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OC}$、p を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 図のような格子状の道路がある。S 地点を出発して、東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分、点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分、それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば、図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



(1) a を通り抜ける経路は何通りあるか。

(2) a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。

(3) すべての経路から任意に 1 つ選んだとき、S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。