

1 実数 x に対して $k \leq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。例えば、
 $[2] = 2$ 、 $[\frac{5}{2}] = 2$ 、 $[-2.1] = -3$ である。

- (1) $n^2 - 5n + 5 < 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。
- (2) $[x]^2 - 5[x] + 5 < 0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。
- (3) x は (2) で求めた範囲にあるものとする。 $x^2 - 5[x] + 5 = 0$ を満たす x をすべて求めよ。

2 a を正の実数、 b と c を実数とし、2 点 $P(-1, 3)$ 、 $Q(1, 4)$ を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を C とおく。 C 上の 2 点 P 、 Q における C の接線をそれぞれ ℓ_1 、 ℓ_2 とする。

- (1) b の値を求め、 c を a で表せ。
- (2) ℓ_1 と ℓ_2 の交点の座標を a で表せ。
- (3) 放物線 C と接線 ℓ_1 、 ℓ_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ。

3 a, b を実数とし、 xy 平面上の 3 直線を

$$\ell : x + y = 0, \quad \ell_1 : ax + y = 2a + 2, \quad \ell_2 : bx + y = 2b + 2$$

で定める。

- (1) 直線 ℓ_1 は a の値によらない 1 点 P を通る。 P の座標を求めよ。
- (2) ℓ, ℓ_1, ℓ_2 によって三角形がつくられるための a, b の条件を求めよ。
- (3) a, b は (2) で求めた条件を満たすものとする。点 $(1, 1)$ が (2) の三角形の内部にあるような a, b の範囲を求め、それを ab 平面上に図示せよ。

4 n を 2 以上の自然数、 q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉、1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を、1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに、小さい番号から順に白玉は q 個ずつ、赤玉は r 個ずつ配分しておく。例えば、1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し、次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし、 n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

- (1) s_2 を求めよ。
- (2) s_3 と a_3 を求めよ。
- (3) s_4 と a_4 を求めよ。