

**1**  $a$  を正の実数とし、2つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$$

を考える。

- (1)  $C_1$  と  $C_2$  の両方に接する直線  $\ell$  の方程式を求めよ。
- (2) 2つの放物線  $C_1, C_2$  と直線  $\ell$  で囲まれた図形の面積を求めよ。

**2**  $A, B$  それぞれがさいころを1回ずつ投げる。

- (i) 同じ目が出たときは  $A$  の勝ちとし、異なる目が出たときには大きい目を出した方の勝ちとする。
- (ii)  $p, q$  を自然数とする。 $A$  が勝ったときは、 $A$  が出した目の数の  $p$  倍を  $A$  の得点とする。 $B$  が勝ったときには、 $B$  が出した目の数に  $A$  が出した目の数の  $q$  倍を加えた合計を  $B$  の得点とする。負けた者の得点は0とする。

$A$  の得点の期待値を  $E_A$ ,  $B$  の得点の期待値を  $E_B$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $E_A, E_B$  をそれぞれ  $p, q$  で表せ。
- (2)  $E_A = E_B$  となる最小の自然数  $p$  と、そのときの  $E_A$  の値を求めよ。

**3**  $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$  を第  $n$  項とする数列を、次のように奇数個ずつの群に分ける。

$$\underbrace{a_1}_{\text{第 1 群}}, \underbrace{a_2, a_3, a_4}_{\text{第 2 群}}, \underbrace{a_5, a_6, a_7, a_8, a_9}_{\text{第 3 群}}, \dots$$

$k$  を自然数として、以下の問いに答えよ。

- (1) 第  $k$  群の最初の項を求めよ。
- (2) 第  $k$  群に含まれるすべての項の和  $S_k$  を求めよ。
- (3)  $(k^2 + 1)S_k \leq \frac{1}{100}$  を満たす最小の自然数  $k$  を求めよ。

**4** 直角三角形  $ABC$  において、 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 、 $AB = 1$  であるとする。 $\angle B = \theta$  とおく。点  $C$  から  $AB$  に垂線  $CD$  を下ろし、点  $D$  から  $BC$  に垂線  $DE$  を下ろす。 $AE$  と  $CD$  の交点を  $F$  とする。

- (1)  $\frac{DE}{AC}$  を  $\theta$  で表せ。
- (2)  $\triangle FEC$  の面積を  $\theta$  で表せ。