

1 xy 平面において、放物線 $y = -x^2 + 6x$ と x 軸で囲まれた図形に含まれ、
 $(a, 0)$ と $(a, -a^2 + 6a)$ を結ぶ線分を一辺とする長方形を考える。ただし、
 $0 < a < 3$ とする。このような長方形の面積の最大値を $S(a)$ とする。

(1) $S(a)$ を a の式で表せ。

(2) $S(a)$ の値が最大となる a を求め、関数 $S(a)$ のグラフをかけ。

2 a を定数とする。 xy 平面上の点の集合 $X(a)$ 、 L を次のように定める。

$$X(a) = \{(x, y) | (x - a)^2 + y^2 \leq \frac{(a + 1)^2}{4}\}$$

$$L = \{(x, y) | y = x - 1\}$$

(1) $X(a) \cap L = \emptyset$ となるような a の値の範囲を求めよ。(ただし、 $\emptyset$ は空集合を表す。)

(2) いかなる実数 a に対しても $P \in X(a)$ となるような点 P の集合を求め、 xy 平面上に図示せよ。

3 k を実数とし、 $a_1 = 0$ 、 $a_2 = 1$ 、 $a_{n+2} = ka_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で数列 $\{a_n\}$ を定める。

- (1) $k = 2$ のとき、一般項 a_n を求めよ。
- (2) すべての n について $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ を満たす α 、 β に対して、 $\alpha + \beta = k$ 、 $\alpha\beta = 1$ が成り立つことを示せ。
- (3) (2) において、異なる実数 α と β が存在するための k の条件を求め、そのときの α と β の値を求めよ。

4 1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころを 4 回投げる試行を考える。

- (1) 出る目の最小値が 1 である確率を求めよ。
- (2) 出る目の最小値が 1 で、かつ最大値が 6 である確率を求めよ。