1 方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える。

(1) 点 $A(-\sqrt{2},0)$ と点 $O(0,0)$ を通り、円 C に接する円の中心の座標を求めよ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき、$\cos\angle APO$ の最大値と最小値を求めよ。

2 4 枚のカードがあって、1 から 4 までの整数がひとつずつ書かれている。このカードをよく混ぜて、1 枚引いては数字を記録し、カードを元に戻す。この試行を n 回繰り返し、記録した順に数字を並べて得られる数列を、$a_1, a_2, \ldots, a_n$ とする。

(1) 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし、$j=1,2,3,4$ とする。

(i) $A_n(1), A_n(2)$ を求めよ。

(ii) $n \geqq 2$ のとき、$A_n(j)$ $(j=3,4)$ を $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), \ldots, A_{n-1}(j)$ で表し、$A_n(3), A_n(4)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき、$a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ。

3 xy 平面上の曲線 $y=xe^x$ と x 軸および 2 直線 $x=n, x=n+1$ で囲まれる図形を D_n とする。ただし、n を自然数とする。

(1) 図形 D_n の面積を S_n として、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{ne^n}$ を求めよ。

(2) 図形 D_n を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n として、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(S_n)^2}$ を求めよ。

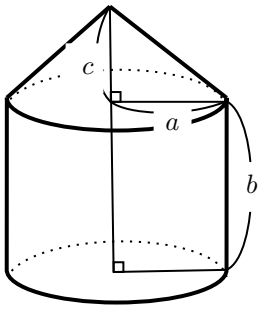
4 図のような，半径 a の円を底面とする高さ b の円柱の上に、同じ大きさの円を底面とする高さ c の直円錐の屋根をのせてできる建物を考える。

(1) V をこの建物の体積、S をこの建物の外側の表面積（底面は除く）とする。V と S を a、b、c で表せ。

(2) V を一定に保ちながら a、b、c を動かして、S を最小にしたい。

(i) $b = xa$、$c = ya$ とおき、V と a を一定としたとき、S の最小値 T を V と a で表せ。

(ii) T が最小となるときの比 $a : b : c$ を求めよ。



5 楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ と双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考える。C_1 と C_2 の焦点が一致しているならば、C_1 と C_2 の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。