

1 a, b を実数とする。方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が実数解をもち、すべての解の絶対値が 1 以下であるとする。

(1) この条件を満たす点 (a, b) 全体を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a + 2b$ の最大値と最小値を求めよ。

2 方程式 $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ で定義される円 C を考える。

(1) 点 $A(-\sqrt{2}, 0)$ と $O(0, 0)$ を通り中心の座標が $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ および $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$ である 2 つの円は、どちらも円 C に接することを示せ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき、 $\cos \angle APO$ の最大値と最小値を求めよ。

3 数 $1, 2, 3$ を重複を許して n 個並べてできる数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ を考える。

(1) 条件 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。

ただし、 $j = 1, 2, 3$ とする。

(a) $A_n(1), A_n(2)$ を求めよ。

(b) $n \geq 2$ のとき、 $A_n(3)$ を $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), A_{n-1}(3)$ で表し、
 $A_n(3)$ を求めよ。

(2) $n \geq 2$ のとき、条件

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \text{ かつ } a_{n-1} > a_n$$

を満たす数列は何通りあるか。

4 $a > 0, b \geq 0, 0 < p < 1$ とし、関数 $y = ax - bx^2$ のグラフは定点 $P(p, p^2)$ を通るとする。このグラフの $0 \leq x \leq p$ に対応する部分を C で表す。

(1) b を a と p を用いて表せ。

(2) a が範囲 $p \leq a \leq 1$ を動くとき、 C 上の点 (x, y) の動く領域を D とする。

(a) x を固定して y の動く範囲を求めよ。

(b) D を図示せよ。

(3) D の面積 S を p で表し、 $\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{3}{4}$ の範囲で S の最大値と最小値を求めよ。