

1 次の問いに答えよ。

(1) すべての整数 m に対して

$$\frac{pm}{m^2 - m - 1}$$

がつねに整数となるような定数 p を求めよ。

(2) a, b を定数として整式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx - a - 2$$

によって定義する。すべての整数 m に対して

$$\frac{f(m)}{m^2 - m - 1}$$

がつねに整数となるための必要十分条件を a, b を用いて表せ。

2 $f(x)$ は $x \geq 0$ で単調に減少する連続関数とする。

(1) すべての $x > 0$ に対して、 $f(x) < \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ を示せ。

(2) 関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (x \geq 0)$$

で定める。 $\frac{F(x)}{x}$ は $x > 0$ で単調に減少することを示せ。

3 xy - 平面の原点 O を中心とする半径 4 の円 E がある。半径 1 の円 C が、内部から E に接しながらすべることなくころがって反時計回りに一周する。このとき、円 C の周上に固定された点 P の軌跡を考える。ただし、はじめに点 P は点 $(4, 0)$ の位置にあるものとする。

- (1) 図のように、 x 軸と円 C の中心のなす角度が θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) となったときの点 P の座標 (x, y) を、 θ を用いて表せ。
- (2) 点 P の軌跡の長さを求めよ。

4 四面体 $ABCD$ において、辺 AB と辺 CD が垂直ならば、頂点 A から平面 BCD に下ろした垂線と、頂点 B から平面 CDA に下ろした垂線は交わることを示せ。