$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1 = 1$$
$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を考える。ただし、i は虚数単位である。

(1) $z_2,\ z_3$ を求めよ。

(2) 上の漸化式を

$$z_{n+1} - a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - a)$$

と表したとき、複素数 a を求めよ。

(3) 一般項 z_n を求めよ。

(4) $z_n = -\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ A を 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ （ただし、$bc \neq 0$)、k を実数とする。行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ について等式

$$XA - AX = kA \quad (*)$$

を考える。ただし、行列の成分はすべて実数とする。

(1) $k = 0$ のとき、$(*)$ を満たす X は A の実数倍であることを示せ。

(2) $k \neq 0$ のとき、$(*)$ を満たす X が存在するための必要十分条件は $A^2 = O$ （ただし、O は零行列）であることを示せ。このとき、$(*)$ を満たす X で $z = c$ であるものを求めよ。

3 a を 1 以上の実数、b を正の実数とする。

(1) 0 以上のすべての実数 x について、不等式 $e^x - a(x+2b) \geqq 0$ が成り立つための、a, b の満たすべき条件を求めよ。ただし、e は自然対数の底とする。

(2) a, b が (1) で求めた範囲を動くとき、定積分

$$\frac{1}{ae^b}\int_0^1 \frac{1}{x+2b}dx$$

の値を最小にする a, b と、その最小値を求めよ。

4 a, b を正の実数とする。空間内の 2 点 $A(0, a, 0)$、$B(1, 0, b)$ を通る直線を ℓ とする。直線 ℓ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を M とする。

(1) x 座標の値が t であるような直線 ℓ 上の点 P の座標を求めよ。

(2) 図形 M と xy 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ。

(3) 図形 M と 2 つの平面 $x = 0$ と $x = 1$ で囲まれた立体の体積を求めよ。

5 ある人がサイコロを振る試行によって、部屋 A, B を移動する。サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る。各試行の結果、部屋 A に居る場合はその人の持ち点に 1 点を加え、部屋 B に居る場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果、部屋 A, B に居る確率をそれぞれ $P_A(n)$, $P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A に居るものとする（$P_A(0) = 1$, $P_B(0) = 0$）、持ち点は 1 とする。

(1) $P_A(1)$, $P_A(2)$, $P_A(3)$ および $P_B(1)$, $P_B(2)$, $P_B(3)$ を求めよ。また、第 3 試行の結果、その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2) $P_A(n+1)$, $P_B(n+1)$ を $P_A(n)$, $P_B(n)$ を用いて表せ。

(3) $P_A(n)$, $P_B(n)$ を n を用いて表せ。

(4) 第 n 試行の結果、その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ。