$\boxed{\mathbf{1}}$ 正の実数 a に対し、$x = a + \dfrac{1}{a}$、$y = a - \dfrac{1}{a}$ とおく。このとき $x^8 - y^8$ が最小となる a の値と、その最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を正の実数とし、関数

$$F(x) = \int_x^{x+a} (|t| - 1)\, dt$$

を考える。

(1) $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。さらに、$F'(x) = 0$ となる x の値をすべて求めよ。

(2) $0 < a < 2$ のとき、$F(x)$ の極小値および極大値と、それらを与える x の値を求めよ。

(3) $a > 2$ のとき、$F(x)$ の極小値と、それを与える x の値を求めよ。

3 1 辺の長さが 1 の立方体 $ABCD$-$EFGH$ がある。3 点 A、C、F を含む平面と直線 BH の交点を P、P から面 $ABCD$ に下ろした垂線の足を Q とする。

(1) 長方形 $DBFH$ を描き、三角形 ACF との交線と点 P を図示せよ。さらに、線分 BP、PQ の長さを求めよ。

(2) 四面体 $ABCF$ に内接する球の中心を O とする。点 O は線分 BP 上にあることを示せ。

(3) 四面体 $ABCF$ に内接する球の半径を求めよ。

4 ある人がサイコロを振る試行によって、部屋 A、B を移動する。サイコロの目の数が 1、3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果、部屋 A に居る場合はその人の持ち点に 1 点を加え、部屋 B に居る場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果、部屋 A、B に居る確率をそれぞれ $P_A(n)$、$P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A に居るものとし（つまり、$P_A(0) = 1$、$P_B(0) = 0$ とする）、持ち点は 1 とする。

(1) $P_A(1)$、$P_A(2)$、$P_A(3)$ および $P_B(1)$、$P_B(2)$、$P_B(3)$ を求めよ。また、第 3 試行の結果、その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2) $P_A(n+1)$、$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$、$P_B(n)$ を用いて表せ。

(3) $P_A(n)$、$P_B(n)$ を n を用いて表せ。