1 xy 平面上の放物線 $A: y = x^2, B: y = -(x-a)^2 + b$ は異なる 2 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ $(x_1 > x_2)$ で交わるとする。

(1) $x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき，b を a で表せ。

(2) $x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき，直線 PQ の通過する領域を求め，図示せよ。

(3) $|PQ| = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき，線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ。

2 z を複素数とし，i を虚数単位とする.

(1) $\dfrac{1}{z+i} + \dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ.

(2) z が上で求めた図形 P 上を動くときに $w = \dfrac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ.

3 曲線 $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす.

この容器の底に排水口がある．時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する．時刻 t において容器に残っている水の深さを h，体積を V とする．V の変化率 $\dfrac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ は $\dfrac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる.

(1) 水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ.

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ.

4 点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする．n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す.

(1) $X(8) = 2$ となる確率を求めよ.

(2) $|X(7)|$ の期待値を求めよ.

(3) P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ.

5 半径 1 の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある。ひとつの辺 AB が x 軸に含まれている状態から始めて，正 n 角形を図のように x 軸上をすべらないようにころがし，再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける。点 A の描く軌跡の長さを $L(n)$ とする。

例 1 図は $n = 6$ の場合

(1) $L(6)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} L(n)$ を求めよ。