

1 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とおく。ただし、 i は虚数単位である。

(1) 実数 a, b, c, d に対して $a + b\omega = c + d\omega$ が成り立つとき、 $a = c$ かつ $b = d$ であることを示せ。

(2) 実数 x, y に対して、実数 s, t を $s + t\omega = \omega(x + y\omega)$ によって定めるとき、

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる 2 次の正方行列 A を求めよ。

(3) $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき、上の A に対して $A^2 + E^{3n}$ を求めよ。ただし、 E は単位行列である。

2 不等式 $\cos 2x + cx^2 \geq 1$ がすべての実数 x について成り立つような定数 c の値の範囲を求めよ。

3 xy 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ へ、この円の外部の点 $P(a, b)$ から 2 本接線を引き、その接点を A, B とし、線分 AB の中点を Q とする。

(1) 点 Q の座標を a, b を用いて表せ。

(2) 点 P が円 $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ の上を動くとき、点 Q の軌跡を求めよ。

4 $-1 < a < 1$ とする。

(1) 積分

$$\int_0^a \frac{1}{1-x^2} dx$$

を求めよ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき、つぎの等式を示せ。

$$\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a} - \sum_{k=0}^n \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

(3) つぎの等式を示せ。

$$\log \frac{1+a}{1-a} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

5 A, B, C の 3 人がつぎのように勝負をくり返す。1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める。2 回目以降には、直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で、やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し、誰かが 2 連勝するか、または、100 回目の勝負を終えたとき、終了する。ただし、硬貨投げで勝つ確率は各々 $\frac{1}{2}$ である。

(1) 4 回以内の勝負で A が 2 連勝する確率を求めよ。

(2) $n = 2, 3, \dots, 100$ とする。 n 回以内の勝負で、 A, B, C のうち誰かが 2 連勝する確率を求めよ。