

1 a, b を正の整数とする.

(1) a が b の倍数ならば, $2^a - 1$ は $2^b - 1$ の倍数であることを示せ.

(2) $2^a - 1$ が素数ならば, a は素数であることを示せ.

(3) $2^a - 1 = (2a + 1)(8a + 1)$ を満たす a を求めよ.

2 $f(x)$ は 2 次以下の多項式で表される関数で

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$$

を満たす. このようなすべての $f(x)$ に対して, 不等式

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx \leq k \int_{-1}^1 \{f'(x)\}^2 dx$$

が成り立つ定数 k のうち最小のものを求めよ.

3 以下の 4 つの条件を満たす 3 次関数 $f(x)$ を求めよ.

(i) $f(0) = 0, f(2) = 1$

(ii) $0.2 < f(1) < 0.3$

(iii) $f(x)$ は極大値 0 をもつ

(iv) $f(x) = 0$ の解はすべて整数

4 AとBの二人が、Aを先手として以下のルールで交互に石を取り合うゲームを行う。

ルール

- ・はじめに n 個の石がある.
- ・まず先手は $(n - 1)$ 個以下の好きな数の石を取る.
- ・以降は、直前に相手が取った石の数の2倍以下の好きな数の石を取ることを繰り返す.
- ・最後の石を取ったほうが勝ちとなる.

相手の石の取り方によらず勝てるような石の取り方があるとき「必勝法がある」という.

例えば $n = 4$ のとき、まず A が1個取れば、次に B は1個か2個取ることができる. もし B が1個取ったなら、 A は次に2個取ることによって勝てる. もし B が2個取ったら、 A は次に1個とることによって勝てる. このように B の石の取り方によらず A は勝てるので、 A に必勝法がある.

- (1) $n = 5$ のとき、 A または B のどちらに必勝法があるか答えよ.
- (2) $n = 10$ のとき、 A または B のどちらに必勝法があるか答えよ.

5 次の [I], [II] のいずれか一方を選択して解答せよ. なお、解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること.

[I]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos^2 \sqrt{x+1} + \sin^2 \sqrt{x})$$

を求めよ.

[II]

$$\frac{n}{1000} \leq 1.001^{100} < \frac{n+1}{1000}$$

を満たす整数 n を求めよ.