$\boxed{\textbf{1}}$ 実数 p, q, r に対して，3 次多項式 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ と定める。実数 a, c，および 0 でない実数 b に対して，$a + bi$ と c はいずれも方程式 $f(x) = 0$ の解であるとする。ただし，i は虚数単位を表す。

(1) $y = f(x)$ のグラフにおいて，点 $(a, f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし，点 $(c, f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする。$a \neq c$ のとき，$s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ。

(2) さらに，a, c は整数であり，b は 0 でない整数であるとする。次を証明せよ。

(i) p, q, r はすべて整数である。

(ii) p が 2 の倍数であり，q が 4 の倍数であるならば，a, b, c はすべて 2 の倍数である。

$\boxed{\textbf{2}}$ a を実数とする。傾きが m である 2 つの直線が，曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ とそれぞれ点 A，点 B で接している。

(1) 線分 AB の中点を C とすると，C は曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ 上にあることを示せ。

(2) 直線 AB の方程式が $y = -x - 1$ であるとき，a, m の値を求めよ。

$\boxed{\textbf{3}}$ 原点を O とする xyz 空間内で，x 軸上の点 A，xy 平面上の点 B，z 軸上の点 C を，次をみたすように定める。

$$\angle OAC = \angle OBC = \theta, \quad \angle AOB = 2\theta, \quad OC = 3$$

ただし，A の x 座標，B の y 座標，C の z 座標はいずれも正であるとする。さらに，$\triangle ABC$ 内の点のうち，O からの距離が最小の点を H とする。また，$t = \tan\theta$ とおく。

(1) 線分 OH の長さを t の式で表せ。

(2) H の z 座標を t の式で表せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 0 以上の整数 a_1, a_2 があたえられたとき、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

により定める。

(1) $a_1 = 1, a_2 = 2$ のとき、a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ。

(2) $a_2 = 3a_1$ のとき、$a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数であることを示せ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ n を 3 以上の自然数とする。サイコロを n 回投げ、出た目の数をそれぞれ順に $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。$i = 2, 3, \cdots, n$ に対して $X_i = X_{i-1}$ となる事象を A_i とする。

(1) $A_2, A_3, \cdots, A_n$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n を求めよ。

(2) $A_2, A_3, \cdots, A_n$ のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n を求めよ。